

HIMPUNAN

A. PENGERTIAN HIMPUNAN

Konsep himpunan mendasari hampir semua cabang matematika. **Gerorg Cantor** dianggap sebagai Bapak teori himpunan. Himpunan adalah kumpulan benda atau objek-objek atau lambang-lambang yang mempunyai arti yang dapat didefinisikan dengan jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana bukan anggota himpunan. Istilah didefinisikan dengan jelas dimaksudkan agar orang dapat menentukan apakah suatu benda merupakan anggota himpunan yang dimaksud tadi atau tidak.

Perhatikan objek yang berada di sekeliling kita, misal ada sekelompok mahasiswa yang sedang belajar di kelas A, setumpuk buku yang berada di atas meja belajar, sehimpunan kursi di dalam kelas A, sekawanan itik berbaris menuju sawah, sederetan mobil yang antri karena macet dan sebagainya, semuanya merupakan contoh himpunan dalam kehidupan sehari-hari.

Jika kita amati semua objek yang berada disekeliling kita yang dijadikan contoh di atas, dapat didefinisikan dengan jelas dan dapat dibedakan mana anggota himpunan tersebut dan mana yang bukan. Himpunan makanan yang lezat, himpunan gadis yang cantik dan himpunan bunga yang indah adalah contoh himpunan yang tidak dapat didefinisikan dengan jelas. Lezatnya makanan, cantiknya gadis dan indahnya bunga bagi setiap orang relatif. Lezatnya suatu hidangan bagi seseorang atau sekelompok orang belum tentu lezat bagi orang lain atau sekelompok orang lainya.

B. JENIS-JENIS HIMPUNAN

1. Himpunan Bagian (Subset).

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B ditulis $A \subset B$, jika setiap anggota A merupakan anggota dari B .

Syarat:

$A \subset B$, dibaca: A himpunan bagian dari B

$A \not\subset B$, dibaca: A bukan himpunan bagian dari B

$B \subset A$ dibaca: B bukan himpunan bagian dari A

$B \not\subset A$ dibaca: B bukan himpunan bagian dari A

Contoh:

Misal $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{2,4\}$ maka $B \subset A$

Sebab setiap elemen dalam B merupakan elemen dalam A , tetapi tidak sebaliknya.

Penjelasan: Dari definisi diatas himpunan bagian harus mempunyai unsur himpunan A juga merupakan unsur himpunan B . artinya kedua himpunan itu harus saling berkaitan.

2. Himpunan Kosong (Nullset)

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai unsur anggota yang sama sama sekali.

Syarat:

Himpunan kosong = $\emptyset$ atau $\{ \}$ Himpunan kosong adalah tunggal

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan

Perhatikan : himpunan kosong tidak boleh di nyatakan dengan $\{ 0 \}$.

Sebab: $\{ 0 \} \neq \{ \}$

Penjelasan: dari definisi diatas himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai satupun anggota, dan biasanya himpunan kosong dinotasikan dengan huruf yunani $\emptyset$ (phi).

3. Himpunan Semesta

Himpunan semesta biasanya dilambangkan dengan “U” atau “S” (Universum) yang berarti himpunan yang memuat semua anggota yang dibicarakan atau kata lainya himpunan dari objek yang sedang dibicarakan.

4. Himpunan Sama (Equal)

Bila setiap anggota himpunan A juga merupakan anggota himpunan B, begitu pula sebaliknya.di notasikan dengan $A=B$

Syarat : Dua buah himpunan anggotanya harus sama.

Contoh :

$A = \{ c,d,e \}$ $B = \{ c,d,e \}$ Maka $A = B$

Penjelasan : Himpunan equal atau himpunan sama,memiliki dua buah himpunan yang anggotanya sama misalkan anggota himpunan A $\{c,d,e\}$ maka himpunan B pun akan memiliki anggota yaitu $\{ c,d,e \}$.

5. Himpunan Lepas

Himpunan lepas adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya tidak ada yang sama.

Contoh $C = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $D = \{2, 4, 6\}$ Maka himpunan C dan himpunan D saling lepas.

Catatan : Dua himpunan yang tidak kosong dikatakan saling lepas jika kedua himpunan itu tidak mempunyai satu pun anggota yang sama

6. Himpunan Komplemen (Complement set)

Himpunan komplemen dapat di nyatakan dengan notasi A^C . Himpunan komplemen jika di misalkan $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan $A = \{3,4,5\}$ maka $A \subset U$. Himpunan $\{1,2,6,7\}$ juga merupakan komplemen, jadi $A^C = \{1,2,6,7\}$. Dengan notasi pembentuk himpunan ditulis :

$$A^C = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

7. Himpunan Ekuivalen (Equal Set)

Himpunan ekuivalen adalah himpunan yang anggotanya sama banyak dengan himpunan lain.

Syarat : Bilangan cardinal dinyatakan dengan notasi $n(A)$ $A \approx B$, dikatakan sederajat atau ekuivalen, jika himpunan A ekuivalen dengan himpunan B.

Contoh :

$$A = \{ w, x, y, z \} \rightarrow n(A) = 4$$

$$B = \{ r, s, t, u \} \rightarrow n(B) = 4$$

$$\text{Maka } n(A) = n(B) \rightarrow A \approx B$$

Penjelasan : himpunan ekuivalen mempunyai bilangan cardinal dari himpunan tersebut, bila himpunan A beranggotakan 4 karakter maka himpunan B pun beranggotakan 4.

C. CARA PENULISAN HIMPUNAN

Ada empat cara untuk menyatakan suatu himpunan

1. Dengan menyebutkan semua anggotanya (roster) yang diletakkan di dalam sepasang tanda kurung kurawal, dan di antara setiap anggotanya dipisahkan dengan tanda koma. Cara ini disebut juga cara *Tabulasi*.

$$\text{Contoh: } A = \{ a, i, u, e, o \}$$

$$B = \{ \text{Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu, Minggu} \}$$

2. menyebutkan syarat anggota-anggotanya, cara ini disebut juga cara *Deskripsi*.

Contoh: ambil bilangan asli kurang dari 5

$$A = \text{bilangan asli kurang dari 5}$$

3. Notasi Pembentuk Himpunan : dengan menuliskan ciri-ciri umum atau sifat-sifat umum (role) dari anggotanya.

Contoh Soal :

Nyatakan dengan notasi himpunan dengan menuliskan tiap-tiap anggotanya dan sifat-sifatnya himpunan berikut ini :

A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6

Penyelesaian :

A adalah himpunan bilangan asli antara 1 dan 6

Dengan menulis tiap-tiap anggotanya $A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

Dengan menulis sifat-sifatnya $A = \{ x \mid 1 < x < 6, x \text{ Asli} \}$

4. Himpunan juga dapat di sajikan secara grafis (**Diagram Venn**)

Penyajian himpunan dengan diagram Venn ditemukan oleh seorang ahli matematika Inggris bernama John Venn tahun 1881. Himpunan semesta digambarkan dengan segiempat dan himpunan lainnya dengan lingkaran di dalam segiempat tersebut.

D. OPERASI PADA HIMPUNAN

1. Gabungan

Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B. Dinotasikan $A \cup B$ Notasi : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

2. Irisan

Irisan (*intersection*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota dari himpunan A dan anggota himpunan B.

Notasi : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

3. Komplemen

Komplemen himpunan A terhadap himpunan semesta S adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota S yang bukan anggota A. Dinotasikan A^c

Notasi : $A^c = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A\}$ atau

4. Selisih

Selisih himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A dan bukan anggota himpunan B. Selisih himpunan A dan B adalah komplemen himpunan B terhadap himpunan A. Dinotasikan $A - B$

Notasi : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

5. Hasil Kali Kartesius (cartesian Product)

Hasil kali kartesius himpunan A dan B, dinotasikan $A \times B$, adalah himpunan yang anggotanya semua pasangan terurut (a,b) dimana a anggota A dan b anggota B

Secara matematis dituliskan : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

PERMUTASI

- Istilah permutasi mengacu pada perhitungan matematis tentang banyaknya cara suatu himpunan tertentu dapat disusun. Permutasi adalah banyaknya cara suatu himpunan dapat disusun atau banyaknya cara suatu himpunan dapat disusun.
- Bentuk umum permutasi:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Keterangan :

$P(n, r)$ = Banyaknya permutasi n unsur diambil r unsur

n = Banyaknya unsur yang tersedia

r = Banyaknya unsur yang dibutuhkan

- Teorema 1

Jika n adalah bilangan bulat positif dan r adalah bilangan bulat dengan $1 \leq r \leq n$, maka permutasi- r dari himpunan dengan n elemen berbeda adalah:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Bukti: Untuk membuktikan kebenaran teorema ini akan digunakan aturan perkalian

- Untuk memilih elemen pertama dari permutasi- r dapat dipilih dengan n cara sebab ada sebanyak n elemen berbeda.
- Untuk memilih elemen kedua dari permutasi- r dapat dipilih dengan $n - 1$ cara berbeda (sebab tersisa $n - 1$ elemen yang tersisa setelah satu elemen diambil untuk posisi pertama).

- Untuk memilih elemen ketiga dari permutasi- r dapat dipilih dengan $n - 2$ cara berbeda (sebab tersisa $n - 2$ elemen yang tersisa setelah dua elemen diambil untuk posisi pertama dan kedua).
- Dst
- Untuk elemen ke- r dari permutasi- r dapat dipilih dengan $n - (r - 1) = n - r + 1$ cara berbeda.

Maka diperoleh:

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

Yang merupakan permutasi- r pada himpunan dengan n elemen berbeda.

Catatan: $P(n, 0) = 1$ untuk n elemen bilangan bulat tak negatif. Sebab pada permutasi tersebut tepat ada satu cara untuk mengurutkan nol elemen yaitu satu daftar tanpa elemen didalamnya yang disebut daftar kosong.

- Akibat 1

Jika n dan r adalah bilangan bulat dengan $0 \leq r \leq n$ maka

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Bukti: Diperhatikan untuk dua kondisi berikut

- Untuk $1 \leq r \leq n$, berdasarkan Teorema 1 berlaku

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - r)!} \end{aligned}$$

- Untuk $r = 0$. Apakah bentuk di atas juga berlaku untuk $r = 0$, hal ini bisa kita lihat pada bentuk berikut $P(n, 0) = \frac{n!}{(n - 0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Dengan demikian $P(n - r) = \frac{n!}{(n - r)!}$

Juga berlaku untuk $r = 0$.

KOMBINASI

1. Pengertian Kombinasi

Kombinasi adalah cara untuk memilih sekelompok objek dari suatu himpunan di mana urutan objek tersebut tidak dianggap penting. Artinya, dalam kombinasi, objek-objek tersebut dianggap setara satu sama lain tanpa memperhatikan posisi atau urutan mereka. Misalnya, jika Anda memiliki beberapa bola dengan nomor yang berbeda di dalam sebuah kotak dan Anda mengambil beberapa bola tanpa memperhatikan urutan pengambilannya, Anda sedang melakukan kombinasi.

2. Simbol dan Representasi Kombinasi

Dalam matematika, simbol untuk kombinasi dari n objek yang diambil r kali disimbolkan dengan

$\binom{n}{r}$, yang dibaca sebagai "n choose r" atau "n atas r". Simbol ini juga dapat ditulis sebagai $C(n, r)$ atau C_n^r .

3. Rumus umum untuk menghitung jumlah kombinasi adalah sebagai berikut:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Di sini:

- $n!$ (n faktorial) adalah hasil perkalian dari semua bilangan bulat positif dari 1 hingga n .
- $r!$ (r faktorial) adalah hasil perkalian dari semua bilangan bulat positif dari 1 hingga $r!$.
- $(n - r)!$ ($(n-r)$ faktorial) adalah hasil perkalian dari semua bilangan bulat positif dari 1 hingga $n - r$.

4. Contoh Penerapan

Mari kita lihat contoh untuk lebih memahami penggunaan rumus kombinasi ini :

Contoh 1: Berapa banyak cara yang berbeda untuk memilih 2 mahasiswa dari 5 mahasiswa untuk mengikuti sebuah kompetisi?

Solusi :

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{7!}{2!(7-2)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{21 \times 5}{2 \times 1} = 105$$

Jadi, ada 105 cara yang berbeda untuk membentuk tim dengan syarat yang diberikan.

5. Penerapan Kombinasi dalam Matematika dan Ilmu Lainnya

Kombinasi memiliki aplikasi yang luas di berbagai bidang matematika, statistik, ilmu komputer, dan ilmu pengetahuan lainnya:

- **Statistika:** Dalam menghitung peluang dan distribusi binomial.
- **Komputer dan Ilmu Pengetahuan Data:** Dalam pemodelan dan analisis kombinatorial.
- **Ilmu Komputer:** Dalam permasalahan pemrograman dan optimisasi.

Kombinasi juga merupakan dasar bagi konsep lebih lanjut seperti permutasi (di mana urutan objek penting) dan banyak aplikasi lainnya dalam matematika diskrit dan terapan.

Dengan memahami konsep kombinasi ini, Anda dapat lebih baik mengatasi berbagai permasalahan yang melibatkan pemilihan objek-objek dari suatu himpunan dengan memperhitungkan atau tidak memperhitungkan urutan.

6. Konsep Dasar Kombinasi

Kombinasi muncul ketika kita perlu memilih sekelompok objek dari suatu himpunan di mana urutan atau susunan objek tersebut tidak dianggap penting. Ini berbeda dengan permutasi, di mana urutan memainkan peran penting dalam proses penghitungan.

Misalnya, jika Anda memiliki setumpuk kartu dan Anda ingin memilih 3 kartu secara acak untuk sebuah permainan, tetapi Anda tidak peduli dengan urutan kartu-kartu tersebut, Anda sedang berurusan dengan kombinasi.

7. Contoh Aplikasi Kombinasi

Kombinasi sering digunakan dalam berbagai konteks matematika dan ilmu lainnya:

- **Statistika:** Dalam perhitungan peluang dan distribusi binomial.
- **Ilmu Komputer:** Dalam analisis algoritma, khususnya dalam permasalahan kombinatorial seperti pencarian dan pengurutan.
- **Teori Kombinatorik:** Dalam menghitung struktur kombinatorial dan memecahkan masalah matematika yang melibatkan pengaturan dan pemilihan.

8. Meskipun terlihat sebagai konsep matematika murni, kombinasi sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari:

- **Perencanaan Acara:** Mengatur kombinasi tamu yang datang dengan mempertimbangkan berbagai faktor seperti kebutuhan diet dan preferensi.
- **Perdagangan dan Bisnis:** Menghitung berbagai cara untuk mengemas produk atau memilih paket promosi yang menarik.

9. Pentingnya Memahami Kombinasi

Memahami kombinasi penting karena membuka pintu untuk berbagai teknik dan strategi dalam penyelesaian masalah matematika dan ilmu terapan. Ini juga mempersiapkan kita untuk menghadapi masalah yang melibatkan pengaturan dan pengelompokan objek-objek, yang muncul dalam berbagai konteks kehidupan.

Dengan pemahaman yang kuat tentang kombinasi, Anda dapat lebih baik memodelkan masalah, menghitung solusi yang tepat, dan menerapkan pengetahuan ini dalam berbagai situasi di bidang matematika dan di luar matematika.

LOGIKA

Manusia mampu mengembangkan pengetahuan dikarenakan adanya kemampuan menalar, dimana kita seringkali dihadapkan dengan sesuatu yang mengharuskan kita untuk mengambil sebuah kesimpulan. Sebelum pengambilan kesimpulan sebaiknya kita mempertimbangkan sesuatu yang akan kita simpulkan tersebut terlebih dahulu oleh karena itu dibutuhkan yang namanya kemampuan bernalar. Penalaran merupakan sebuah kemampuan untuk berpikir guna untuk menarik sebuah kesimpulan, dengan demikian kemampuan menalar sangatlah penting dalam kehidupan manusia.

Dalam menarik sebuah konklusi dibutuhkan yang namanya logika, logika dapat diartikan sebagai ilmu berpikir dan menalar dengan benar sehingga kita dapat menarik sebuah konklusi yang absah. Secara leboh rinci, dapat dikatakan bahwa logika merupakan teori berpikir atau ilmu yang mengkaji prinsip-prinsip penalaran yang benar dan penarikan sebuah kesimpulan yang absah baik itu bersifat deduktif maupun induktif.

Belajar logika dapat meningkatkan kemampuan menalar kita karena dengan logika kita mampu mengenali dan menggunakan bentuk-bentuk umum dari cara penarikan konklusi dan menghindari kesalahan-kesalahan. Simbol-simbol dalam logika merupakan sarana yang penting untuk melakukan penalaran, dalam perkembangan akhir-akhir ini perusahaan menggunakan analisa simbol untuk memeriksa ketidakkonsistenan dan kekurangan-kekurangan yang dibuat dalam kontrak-kontrak perjanjian yang mereka buat.

Dalam logika terdapat 5 aliran besar yaitu:

1. Aliran logika tradisional yang dipelopori oleh Ariustoteles, ia menyimpulkan bahwa logika merupakan suatu kumpulan aturan yang praktis yang menjadi petunjuk pemikiran
2. Aliran logika metafisis yang dipelopori oleh Friedrich Hegel, ia menganggap logika seperti metafisis. Tugas pokok logika adalah menafsirkan pikiran sebagai suatu tahap dari struktur kenyataan, sebab itu untuk mengetahui kenyataan, orang harus belajar logika terlebih dahulu
3. Aliran logika epistemologis dipelopori oleh Francis Herbert Bradley dan Bernard Bosanquet, logika harus dibubuhkan dengan seluruh pengetahuan untuk mencapai kebenaran
4. Aliran logika instrumental (aliran logika pragmatis) yang dipelopori oleh John Dewey, logika dianggap sebagai alat untuk memecahkan masalah
5. Aliran logika simbolik dipelopori oleh Leibniz, Boole, dan De Morgan

- **Pernyataan**

Kalimat adalah kumpulan kata yang disusun menurut aturan tata bahasa. Kata adalah rangkaian huruf yang mengandung arti. Kalimat berarti rangkaian kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti.

Contoh kalimat yang bernilai benar :

1. 5 kurang dari 6
2. 4 adalah bilangan asli dan bilangan genap
3. Indonesia Raya adalah lagu kebangsaan Indonesia. (pernyataan benar)
4. Bika ambon berasal dari Ambon. (pernyataan salah)

Adapun kalimat yang bernilai salah

1. Berapa umurmu?
2. Bersihkan tempat tidurmu

Suatu pernyataan atau statement adalah suatu kalimat deklaratif yang bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus kedua-duanya, nilai benar atau nilai salah suatu pernyataan disebut nilai kebenaran pernyataan itu dan ditentukan oleh realitas yang dinyatakannya.

- **Variabel dan konstanta**

Variabel merupakan simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan, sedangkan konstanta merupakan simbol yang menunjukkan anggota tertentu yang sudah spesifik dalam semesta pembicaraan.

Contoh:

- a. memakai sepatu
- b. $10 + x = 15$
- c. $33 + = 40$
- d. $p > 5$

Jika kata “....” diganti dengan “Ani” maka kalimat tersebut menjadi “Ani memakai sepatu, kalimat ini bernilai benar saja atau salah saja tergantung realitasnya.

Jika x pada b diganti 5 maka kalimat tersebut menjadi “ $10 + 5 = 15$ ” kalimat(pernyataan ini jelas bernilai benar saja. Jika “....” pada c diganti menjadi 7 maka kalimat tersebut menjadi $33 + 9 = 40$, pernyataan tersebut bernilai salah saja.

“.... , x” disebut dengan variabel sedangkan “ Ani , 5, 9” disebut konstanta.

- **Kalimat terbuka**

Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung variabel dan jika variabel tersebut diganti dengan konstanta dengan semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau bernilai salah saja.

Kalimat-kalimat seperti a, b, c , dan d merupakan kalimat terbuka, jika kalimat tersebut sudah diganti dengan konstanta yang sesuai maka kalimat yang terjadi merupakan kalimat tertutup.

Jika variabel pada kalimat matematika itu sudah diganti dengan konstanta dan menggunakan tanda “=” maka kalimat yang terjadi disebut kesamaan sedangkan jika kalimat matematika yang tidak mengandung variabel dan menggunakan tanda “<, > atau $\sim$ ” maka disebut dengan ketidaksamaan.

- **Kata hubung kalimat**

Dalam bahasa Indonesia kita sering menggunakan kata-kata “tidak, dan, atau, jika.....maka, jika dan hanya jika” kata tersebut disebut dengan kata hubung kalimat, dalam kata hubung kalimat terdapat lima macam kata hubung kalimat yaitu negasi, konjungsi, disjungsi, kondisional, dan bikondisional.

a. **Negasi**

Negasi tidak menghubungkan dua buah pernyataan sederhana, tetapi tetap dianggap sebagai kata hubung kalimat, yaitu menegasikan pernyataan sederhana. Ingkaran suatu pernyataan adalah pernyataan yang bernilai benar, jika pernyataan tersebut bernilai salah atau sebaliknya maka ingkaran dari pernyataan tersebut ditulis p atau $\sim p$

Contoh:

1. Jika p : Makassar adalah ibukota Sulawesi Selatan
Maka $\sim p$: Tidak benar bahwa Makassar adalah ibukota Sulawesi Selatan
Atau $\sim p$: Makassar bukan ibukota Sulawesi Selatan
2. Jika p : $2 + 5 > 9$ (S)
Maka $\sim p$: Tidak benar bahwa $2 + 5 > 9$ (B)
Atau $\sim p$: $2 + 5 < 9$ (B)

Membentuk ingkaran suatu pernyataan dapat dengan menambahkan kata-kata *tidak benar* di depan pernyataan aslinya, atau jika mungkin dengan menambah *bukan* atau *tidak* di dalam pernyataan itu, tetapi untuk pernyataan-pernyataan tertentu tidak demikian halnya.

P	$\sim P$
---	----------

B	S
S	B

tabel kebenaran

b. Konjungsi

Konjungsi merupakan dua buah pernyataan yang dihubungkan dengan “dan” yang merupakan kalimat majemuk. Penghubung “dan” diberi simbol “ $\wedge$ ” konjungsi dari pernyataan p dan q ($p \wedge q$) dan dibaca: p dan q masing-masing p dan q disebut komponen (sub pernyataan) pernyataan p dan q juga disebut sebagai pernyataan konjungtif.

Contoh:

1. Jika r : Andi anak yang berbakti, dan

s : Andi anak yang pintar

Maka $r \wedge s$ bernilai benar jika Andi benar-benar anak yang berbakti dan benar-benar anak yang pintar.

2. Jika r : Bunga mawar mempunyai duri (B), dan

s : Bunga teratai tumbuh di tanah (S)

Maka $r \wedge s$: bunga mawar mempunyai duri dan bunga teratai tumbuh di tanah(S)

Suatu konjungsi dari dua pernyataan bernilai benar hanya dalam keadaan kedua komponennya bernilai benar

p	q	$r \wedge s$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

c. Disjungsi

“Aira seorang mahasiswa yang cemerlang atau atlit yang berbakat”, membaca pernyataan itu akan menimbulkan tafsiran

1. Aira seorang mahasiswa yang cemerlang atau atlit yang berbakat, tetapi tidak kedua-duanya, atau
2. Aira seorang mahasiswa yang cemerlang atau atlit yang berbakat, mungkin kedua-duanya

Tafsiran pertama adalah contoh disjungsi eksklusif dan tafsiran kedua adalah contoh disjungsi inklusif. Jika pernyataan semula benar maka salah satu dari tafsiran 1 dan 2 adalah benar (untuk disjungsi eksklusif), mungkin keduanya benar (disjungsi inklusif) dan sebaliknya. Lebih dari itu, jika pernyataan semula salah, maka kedua tafsiran itu tentu salah (untuk disjungsi eksklusif dan disjungsi inklusif)

“Jika matahari bersinar maka udara terasa hangat”. Jadi jika matahari bersinar maka kita akan tahu bahwa udara terasa hangat, karena itu akan sama artinya dengan “ jika matahari bersinar, udara terasa hangat”, “sepanjang matahari bersinar, udara terasa hangat”, “matahari bersinar hanya jika udara terasa hangat”.

Berdasarkan pernyataan di atas maka untuk menunjukkan bahwa udara terasa hangat adalah cukup dengan menunjukkan bahwa matahari bersinar atau matahari bersinar merupakan syarat cukup untuk udara terasa hangat.

- d. Bikondisional (biimplikasi atau pernyataan bersyarat ganda)

Pernyataan bikondisional bernilai benar hanya jika komponen komponennya bernilai benar.

Contoh:

Jika p: 4 adalah bilangan genap(B)

q: 7 adalah bilangan ganjil (B)

Maka $p \leftrightarrow q$: 4 adalah bilangan genap jika dan hanya jika 7 adalah bilangan ganjil

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Tabel kebenaran

GRAF

Teori Graf adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari struktur hubungan antara objek- objek yang disebut sebagai “simpul” atau “node,” yang dihubungkan oleh “sisi” atau “edge.” Graf juga menjadi salah satu pokok pembahasan dalam matematika diskrit, yang tujuannya untuk memvisualisasikan objek-objek agar lebih mudah dimengerti.

Graf adalah kumpulan titik yang mungkin terhubung maupun tidak terhubung dengan titik lainnya dengan garis. Tidak penting seberapa besar titik itu, atau seberapa panjang garisnya, atau apakah garis itu lurus atau melengkung. Dan titik itu pun tidak harus bulat.

Meskipun terdengar rumit, konsep ini memiliki aplikasi yang sangat luas dalam berbagai aspek kehidupan kita, termasuk dalam teknologi, jaringan, transportasi, dan banyak lagi. Artikel ini akan membahas dasar-dasar teori graf dan beberapa aplikasi menariknya dalam kehidupan sehari-hari.

Sejarah Teori Graf

Teori ini merupakan cabang matematika yang mempelajari struktur hubungan antara objek-objek yang disebut sebagai simpul atau node, dan sisi atau edge yang menghubungkan mereka, memiliki sejarah yang panjang dan kaya. Teori ini pertama kali muncul di abad ke-18 ketika seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler, memecahkan “Masalah Tujuh Jembatan Königsberg.”

Pada tahun 1736, Euler menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk mengunjungi semua tujuh jembatan di Königsberg tanpa melewati salah satu dua kali, menggagas konsep graf untuk pertama kalinya. Dalam dekade berikutnya, teori graf berkembang pesat, dengan kontribusi dari para matematikawan terkenal seperti Gustav Kirchhoff, William Hamilton, dan Arthur Cayley.

Jenis-jenis Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G=(V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, R. 2005).

1. Berdasarkan ada tidaknya loop atau sisi ganda pada suatu graf

Dalam teori ini, simpul mewakili entitas atau objek, sedangkan sisi adalah hubungan antara simpul-simpul tersebut. Misalnya, dalam jaringan sosial, simpul dapat mewakili pengguna, dan sisi menggambarkan hubungan pertemanan di antara mereka.

- Graf sederhana (simple graph): Graf yang tidak mengandung loop maupun sisi ganda.
- Graf tak-sederhana (unsimple-graph): Graf yang mengandung loop maupun sisi ganda.

2. Berdasarkan orientasi arah pada sisi

Graf Berarah dan Tidak Berarah: Graf yang berisi sisi dengan arah disebut “graf berarah,” sedangkan graf yang tidak memiliki arah pada sisinya disebut “graf tidak berarah.” Misalnya, peta jalan kota adalah contoh graf berarah karena jalan-jalan memiliki arah, sementara jaringan telepon adalah contoh graf tidak berarah karena panggilan bisa berjalan dalam dua arah.

- Graf tak berarah (undirected graph): Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
- Graf berarah (directed graph/digraph): Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

3. Graf Berbobot

Beberapa graf memiliki bobot pada setiap sisi, yang menggambarkan nilai atau jarak. Misalnya, dalam peta jalan kota, bobot bisa merepresentasikan jarak antara persimpulan.

Aplikasi dalam Dunia Nyata

- Jaringan Sosial: Teori ini sangat penting dalam memahami jaringan sosial. Dalam media sosial, hubungan antara pengguna dapat direpresentasikan sebagai graf, dan ini memungkinkan kita untuk menganalisis pengaruh, penyebaran informasi, dan tren yang muncul dalam jaringan tersebut.
- Rute dan Logistik: Dalam bidang transportasi, teori graf digunakan untuk mengoptimalkan rute pengiriman, perencanaan perjalanan, dan logistik. Ini membantu perusahaan untuk menghemat waktu dan biaya.
- Rekomendasi dan Pencocokan: Layanan rekomendasi di platform streaming musik atau toko daring menggunakan teori graf untuk menghubungkan preferensi pengguna dengan barang atau konten yang mungkin mereka sukai.
- Pemrosesan Bahasa Alami: Dalam pemrosesan bahasa alami, teori graf digunakan untuk memodelkan hubungan antara kata-kata dalam sebuah teks, sehingga komputer dapat memahami konteks dan makna yang lebih baik.
- Sirkuit Elektronik dan Komunikasi: Dalam rekayasa elektronik, desain sirkuit terkadang memerlukan representasi graf. Selain itu, jaringan komunikasi juga menggunakan konsep teori graf untuk mengoptimalkan aliran data.
- Perencanaan Jaringan Komputer: Desain jaringan komputer kompleks, seperti internet, adalah hasil dari penggunaan teori graf. Itu memungkinkan pengiriman data yang efisien dan kehandalan jaringan.
- Biologi dan Genetika: Teori graf digunakan untuk memodelkan interaksi gen dalam genom dan interaksi protein dalam biologi molekuler.
- Manajemen Proyek: Dalam manajemen proyek, graf digunakan untuk menggambarkan aliran pekerjaan, dependensi tugas, dan sumber daya yang diperlukan. . Navigasi GPS: Sistem navigasi GPS menggunakan teori graf untuk menghitung rute tercepat antara dua titik dalam peta, memandu pengemudi dengan akurasi tinggi.
- Jaringan Sosial: Facebook menggunakan analisis graf untuk menunjukkan “teman-teman yang mungkin Anda kenal” berdasarkan teman-teman yang Anda miliki dan hubungan di antara mereka.

- Perjalanan Udara: Maskapai penerbangan menggunakan teori graf untuk mengatur jadwal penerbangan, mengoptimalkan perjalanan dan mengurangi keterlambatan.
- Genetika dan Biologi: Teori graf digunakan untuk memodelkan interaksi gen dalam genom dan interaksi protein dalam biologi molekuler, membantu dalam penelitian kesehatan dan pengembangan obat.
- Manajemen Proyek: Dalam manajemen proyek, graf digunakan untuk menggambarkan aliran pekerjaan, dependensi tugas, dan alokasi sumber daya.
- Rekomendasi Musik dan Film: Layanan streaming seperti Spotify dan Netflix menggunakan algoritma berbasis graf untuk merekomendasikan lagu atau film yang sesuai dengan preferensi pengguna.

Kesimpulan

Teori Graf adalah bidang matematika yang kuat dan serbaguna yang memiliki dampak besar dalam berbagai aspek kehidupan kita. Teori Graf adalah alat yang kuat dalam memahami dan mengatasi kompleksitas hubungan dan jaringan di dunia ini.

Dengan sejarah yang panjang dan manfaat yang meluas, teori graf telah menjadi inti dari berbagai aplikasi yang kita nikmati dalam kehidupan sehari-hari. Dari jaringan sosial hingga manajemen proyek, aplikasi teori graf tersebar luas dan memberikan kontribusi besar dalam pemecahan masalah, pengoptimalan, dan pengambilan keputusan. Pemahaman konsep dasar teori graf dapat membantu kita menggali potensi dan inovasi lebih lanjut dalam memecahkan tantangan kompleks di masa depan.

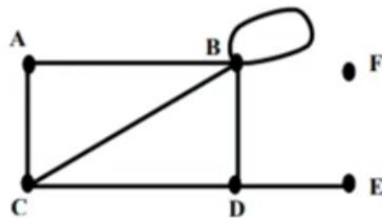
Derajat Dalam Graf

Derajat graf adalah jumlah dari derajat simpul-simpulnya. Sedangkan derajat simpul adalah banyaknya ruas yang incidence (terhubung) ke simpul tersebut.

Macam-Macam Derajat

- *Simpul ganjil* bila derajat simpulnya merupakan bilangan ganjil.
- *Simpul genap* bila derajat simpulnya merupakan bilangan genap.
- *Simpul bergantung* bila derajat simpulnya 1
- *Simpul terpencil* bila derajat simpulnya adalah 0

Derajat Pada Graf tidak Berarah



$$D(A) = 2$$

$$D(B) = 5$$

$$D(C) = 3$$

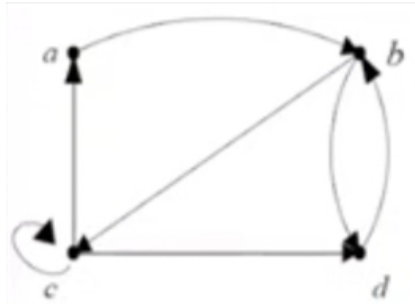
$$D(D) = 3$$

$$D(E) = 1$$

$$D(F) = 0$$

$$D(V) = 14 \text{ (Derajat verteks)}$$

Derajat Pada Graf Berarah



$$\text{din}(a) = 1$$

$$\text{dout}(a) = 1$$

$$\text{din}(b) = 2$$

$$\text{dout}(b) = 2$$

$$\text{din}(c) = 2$$

$$\text{dout}(c) = 3$$

$$\text{din}(d) = 2$$

$$\text{dout}(d) = 1$$

$$DV = \text{din} + \text{dout} = 7 + 7 = 14$$